Représentations matricielles des 15 groupes d'ordre 24

Jean-Yves Degos [1]

Introduction

Dans cet article, je me propose de faire un clin d'œil mathématique à l'ouvrage de mon père publié dans la collection *Domino* (Degos J.-G., 1998). Chaque volume de cette collection abordait un champ de connaissance en deux parties : un essai pour comprendre, un essai pour réfléchir. Dans l'esprit de la collection, le livre de mon père comportait les deux suivantes : *La complexité de la mesure*; *La mesure de la complexité.* D'un point de vue littéraire, on a affaire à ce qu'on appelle un chiasme. D'un point de vue mathématique, on parlera de symétrie, ou d'involution. Une involution est un élément d'un groupe dont le carré est l'élément neutre. Lorsque j'étais étudiant en 1991, j'avais été marqué par une belle propriété du nombre 24 : dans l'anneau des classes de restes d'entiers modulo n, tous les éléments inversibles sont des involutions, si et seulement si est n un diviseur de 24 (Le Lionnais F., 1999, p. 24, 8e propriété du nombre 24). La quatrième de couverture de (Degos J.-G., 1998) comporte un schéma de calcul digital organisé en $3 \times 5 = 15$ mains. Ces deux nombres, 15 et 24, sont reliés par le théorème suivant : il existe 15 classes d'isomorphismes de groupes d'ordre 24. Cet article affirme et commente le résultat original suivant : chacun des 15 groupes non isomorphes d'ordre 24, peut être réalisé comme sous-groupe du groupe des matrices inversibles à 6 lignes et 6 colonnes, à coefficients dans le corps à 5 éléments (groupe noté $GL(6,5)$). Dans la première section, on précisera le vocabulaire et les notations indispensables à connaître pour pouvoir comprendre la classification des groupes d'ordre 24, telle qu'elle est donnée dans (Joyner D., 2008, p. 212-213) ou encore

1. Agrégé de mathématiques, Docteur en mathématiques de l'Université Bordeaux I, Contrôleur de l'Insee au Centre statistique de Metz.

dans (Debreil A., 2016, p. 545-559). Dans la deuxième section, on reprendra la classification de Joyner, et on donnera une classification par les nombres d'éléments d'ordre donné ; puis on donnera la solution au problème posé, essentiellement sans preuves : celles-ci feront l'objet d'un travail ultérieur.

1. Notions utiles pour comprendre la classification des groupes d'ordre 24 et le résultat principal

1.1. Notions de base : groupe fini, sous-groupe, groupe engendré par une partie, ordre d'un élément

On appelle groupe $(G, *)$ un ensemble G muni d'une loi $*$ de composition, qui satisfait les axiomes suivants :
(i) la loi $*$ est interne, c'est-à-dire que pour tout $x \in G$ et pour tout $y \in G$, on a $x * y \in G$;
(ii) la loi $*$ est associative, c'est-à-dire que pour tout $x \in G$, pour tout $y \in G$, et pour tout $z \in G$, on a $x * (y * z) = (x * y) * z$;
(iii) il existe un unique élément neutre noté e qui vérifie que pour tout $x \in G$: $x * e = e * x = x$;
(iv) pour tout $x \in G$, il existe un élément unique $y \in G$ qui vérifie : $x * y = y * x = e$.

L'élément y s'appelle le symétrique de x et se note x^{-1}. Si la loi $*$ est notée multiplicativement (resp. additivement), le symétrique de x s'appelle l'inverse de x (resp. l'opposé de x) et se note x^{-1} (resp. $-x$). Une loi n'est notée additivement que si le groupe G est abélien, c'est-à-dire si la loi $*$ est commutative.

Si l'ensemble sous-jacent à $(G, *)$ est a un nombre fini d'éléments, on dit que G est un groupe fini.

On appelle sous-groupe d'un groupe $(G, *)$, tout sous-ensemble H de G tel que $(H, *)$ est encore un groupe, de même élément neutre que $(G, *)$.

Étant donné $(G, *)$ un groupe, le groupe engendré par un sous-ensemble A de G est le plus petit sous-groupe de G (pour l'inclusion) qui contient A.

Si $x \in G$, le groupe engendré par x se note souvent $H = \langle x \rangle$; le nombre d'éléments de H s'appelle l'ordre de x.

Concluons cette partie en rappelant le très important Théorème de Lagrange : Si G est un groupe fini d'ordre n, et si H est un sous-groupe de G, alors H est fini et son ordre, c'est-à-dire son nombre d'éléments, est un diviseur de n.

1.2. Notions avancées : produit direct de groupes, sous-groupes normaux, groupes quotients, produit semi-direct de groupes

Dorénavant, pour simplifier, tous les groupes seront notés multiplicativement. On peut consulter utilement pour cette partie (Debreil A., 2016, p.11, p. 13, et p. 23).

Lorsqu'on dispose de deux groupes finis G_1 et G_2, on peut en faire le produit direct, c'est-à-dire le produit cartésien $G_1 \times G_2$, ensemble des couples (x, y) avec $x \in G_1$ et $y \in G_2$, muni de la loi produit définie par $(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2, y_1y_2)$.

Étant donné G un groupe, et H un sous-groupe de G, on dit que H est un sous-groupe normal (ou distingué) dans G pour tout $h \in H$ et pour tout $g \in G$, la propriété suivante est vérifiée : $ghg^{-1} \in H$. On note alors $H \lhd G$.

Lorsque $H \lhd G$, la relation xRy si et seulement si $xy^{-1} \in H$ définit une relation d'équivalence sur G, et l'ensemble quotient G/R, des classes d'équivalence de G modulo la relation R est alors canoniquement muni d'une structure de groupe. On le note G/H et on l'appelle quotient de G par H.

Étant donnés un groupe G et deux sous-groupes N et H, on dit que G est produit semi-direct de N par H (Calais J., 1984, p. 213) si les trois conditions suivantes sont satisfaites :

– le groupe N est distingué dans G : $N \lhd G$;

– tout élément de G s'écrit comme le produit d'un élément de N par un élément de H : $G = NH$;

– l'intersection de N et de H est réduite à l'élément neutre : $N \cap H = \{e\}$.

On écrit alors : $G = N \rtimes H$.

1.3. Les groupes élémentaires

1.3.1. Le groupe cyclique $\mathcal{C}_n$

Le groupe cyclique d'ordre n est le groupe engendré par un élément d'ordre $n \geq 2$ entier naturel. Un exemple de réalisation de cette structure est donné, dans le groupe des matrices inversibles à coefficients réels à 2 lignes et 2 colonnes, par le groupe engendré par la rotation de centre l'origine, et d'angle $\frac{2\pi}{n}$, soit précisément l'ensemble de matrices :

$$\left[\begin{array}{cc} \cos(\frac{2k\pi}{n}) & -\sin(\frac{2k\pi}{n}) \\ \sin(\frac{2k\pi}{n}) & \cos(\frac{2k\pi}{n}) \end{array}\right],$$

pour tous les entiers k vérifiant $0 \leq k \leq n-1$.

1.3.2. Le groupe diédral $\mathcal{D}_{2m}$

Le groupe diédral d'ordre $2m$, noté $\mathcal{D}_{2m}$, est l'unique groupe engendré par un élément r d'ordre $m \geq 2$ et un élément t d'ordre 2 satisfaisant la relation supplémentaire : $trt^{-1} = r^{-1}$.

Le groupe $\mathcal{D}_{2m}$ peut être modélisé par le groupe d'isométries qui laissent globalement invariants les sommets d'un polygone régulier à $2m$ côtés, pour $m \geq 2$.

1.3.3. Le groupe symétrique $\mathcal{S}_n$

Le groupe symétrique $\mathcal{S}_n$ est le groupe des bijections d'un ensemble à n éléments. On peut le modéliser de plusieurs manières. La plus usuelle consiste à considérer l'ensemble E des n premiers entiers naturels, à partir de 1, et les permutations de E. Une autre modélisation pratique est la modélisation matricielle : pour chaque permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on définit la matrice $A(\sigma) = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ par : $a_{i,j} = 1$ si $\sigma(i) = j$ et 0 sinon.

1.3.4. Le groupe alterné $\mathcal{A}_n$

Pour une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on appelle signature de σ le nombre :

$$\epsilon(\sigma) = \prod_{1\leq i<j\leq n} \frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j}.$$

Le groupe alterné $\mathcal{A}_n$ est le sous-groupe de $\mathcal{S}_n$ formé des permutations σ dites paires, c'est-à-dire celles pour lesquelles $\epsilon(\sigma) = 1$. Le groupe alterné $\mathcal{A}_n$ est toujours distingué dans le groupe $\mathcal{S}_n$, et le groupe quotient qui en résulte est d'ordre 2.

1.3.5. Les groupes de quaternions (généralisés)

Le groupe des quaternions, noté $\mathcal{Q}$, est l'ensemble $\mathcal{Q} = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$, avec les règles de calcul suivantes : $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$, $ij = k$, $jk = i$, $ki = j$, et, en général : $xy = -yx$ pour $x \in \{i, j, k\}$ et $y \in \{i, j, k\}$, pourvu que x et y soient distincts (Joyner D, 2008, p. 84 et suivante). Ce groupe est d'ordre 8.

Le groupe des quaternions généralisés, noté $\mathcal{Q}_{2m}$, pour $m \geq 2$, est l'unique groupe engendré par deux éléments a d'ordre $2m$ et b d'ordre 4, avec les relations supplémentaires : $aba = a$ et $b^2 = a^m$ (Joyner D, 2008, p. 209). Ce groupe est d'ordre $4m$.

En particulier, pour $m = 2$, on peut se poser la question de trouver la correspondance entre $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q}_{2m}$, qui est aussi d'ordre 8. Il suffit de prendre $a = i$ et $b = -j$ pour avoir cette correspondance.

1.4. Le corps à 5 éléments, et le groupe $GL(6, 5)$

Le corps à 5 éléments est un corps commutatif, comme le sont les corps usuels des nombres réels et des nombres complexes : c'est un ensemble qu'on notera $\mathbb{F}_5$, et qu'on peut modéliser par l'ensemble $\mathbb{F}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, muni de l'addition et de la multiplication modulo 5. Ainsi les tables de d'addition et de multiplication dans le corps $\mathbb{F}_5$ sont-elles les suivantes :

$+$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

et

$\times$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

.

On notera en particulier que dans $\mathbb{F}_5$, 1 (resp. 2) et 4 (resp. 3) sont opposés pour l'addition, $5 = 0$, 2 et 3 sont inverses pour la multiplication, cependant que 1 et 4 sont chacun leur propre inverse.

Le corps $\mathbb{F}_5$ étant défini, la notion de matrice à coefficients dans $\mathbb{F}_5$ a parfaitement un sens, et on peut ajouter ou multiplier des matrices à coefficients dans $\mathbb{F}_5$ avec les mêmes règles formelles qu'on ajoute ou multiplie des matrices à coefficients réels. Simplement, il ne faut pas oublier, dans les calculs, de réduire tous les coefficients modulo 5. Le groupe $GL(6, 5)$ est alors tout simplement le groupe des matrices inversibles à coefficients dans $\mathbb{F}_5$, qui ont 6 lignes et 6 colonnes.

2. Classifications des groupes d'ordre 24

2.1. Classification par la structure du groupe

Nom	Structure	Gén.	Relations	$\simeq$
G_1	$\mathcal{C}_{24}$	a	$a^{24}=1$	
G_2	$\mathcal{C}_2 \times \mathcal{C}_{12}$	a,b	$a^2=1, b^{12}=1,$ $ab=ba$	
G_3	${\mathcal{C}_2}^2 \times \mathcal{C}_6$	a,b,c	$a^2=1, b^2=1, c^6=1,$ $ab=ba, ac=ca, bc=cb$	
G_4	$\mathcal{D}_6 \times \mathcal{C}_2$	a,b,c	$a^6=1, b^2=1, c^2=1,$ $aba=b, ac=ca, bc=cb$	
G_5	$\mathcal{A}_4 \times \mathcal{C}_2$	a,b,c	$a^2=1, b^3=1, c^2=1,$ $(ba)^3=1, ab=ba, ac=ca$	
G_6	$\mathcal{Q}_6 \times \mathcal{C}_2$	a,b,c	$a^6=1, b^2=a^3, c^2=1,$ $aba=b, ac=ca, cb=bc$	
G_7	$\mathcal{D}_4 \times \mathcal{C}_3$	a,b,c	$a^4=1, b^2=1, c^3=1,$ $aba=b, ac=ca, cb=bc$	
G_8	$\mathcal{Q} \times \mathcal{C}_3$	a,b,c	$a^4=1, b^2=a^2, c^3=1,$ $bab=a, ac=ca, cb=bc$	
G_9	$\mathcal{S}_3 \times \mathcal{C}_4$	a,b,c	$a^4=1, b^2=1, c^4=1,$ $aba=b, ac=ca, cb=bc$	
G_{10}	$\mathcal{D}_{12}$	a,b	$a^{12}=1, b^2=1,$ $aba=b$	
G_{11}	$\mathcal{Q}_{12}$	a,b	$a^{12}=1, b^2=a^6,$ $aba=b$	
G_{12}	$\mathcal{S}_4$	a,b	$a^4=1, b^2=1,$ $(ab)^3=1$	Pul
G_{13}	$SL(2,3)$	a,b,c	$a^4=1, b^2=a^2, c^3=1,$ $aba=b, ac=cb, bc=cab$	$\mathcal{Q} \rtimes \mathcal{C}_3$
G_{14}		a,b	$a^3=1, b^8=1,$ $aba=b$	$\mathcal{C}_3 \rtimes \mathcal{C}_8$
G_{15}		a,b,c	$a^3=1, b^4=1, c^2=1$ $bcb=c, aba=b, ac=ca$	$\mathcal{C}_3 \rtimes \mathcal{D}_4$

Le groupe Pul est défini dans (Degos J.-Y., 2013b) et on montre qu'il est borroméen au sens donné dans (Degos J.-Y., 2013a). Ces deux articles sont téléchargeables sur le site de la revue, donc nous ne reproduisons pas ici les définitions.

2.2. Classification par le nombre d'éléments d'ordre donné

Nom	O_1	O_2	O_3	O_4	O_6	O_8	O_{12}	O_{24}
G_1	1	1	2	2	2	4	4	8
G_2	1	3	2	4	6	0	8	0
G_3	1	7	2	0	14	0	0	0
G_4	1	15	2	0	6	0	0	0
G_5	1	7	9	0	8	0	0	0
G_6	1	3	2	12	6	0	0	0
G_7	1	5	2	2	10	0	4	0
G_8	1	1	2	6	2	0	12	0
G_9	1	7	2	8	2	0	4	0
G_{10}	1	13	2	2	2	0	4	0
G_{11}	1	1	2	14	2	0	4	0
G_{12}	1	9	8	6	0	0	0	0
G_{13}	1	1	8	6	8	0	0	0
G_{14}	1	1	2	2	2	12	4	0
G_{15}	1	9	2	6	6	0	0	0

Ce tableau se lit ainsi : dans le groupe G_1, il y a 1 élément d'ordre 1 (l'élément neutre), 1 élément d'ordre 2, 2 éléments d'ordre 3, 2 éléments d'ordre 4, 2 éléments d'ordre 6, 4 éléments d'ordre 8, 4 éléments d'ordre 12 et 8 éléments d'ordre 24.

3. Réalisation des groupes d'ordre 24 comme des sous-groupes de $GL(6,5)$: le résultat principal

Dans chacune des sous-sections suivantes, nous énumérons, pour les 15 classes d'isomorphismes, un ensemble minimal de générateurs. On a alors, en général, $G_i = \langle A_i, B_i, C_i \rangle$ pour $1 \leq i \leq 15$, avec parfois moins de 3 générateurs.

3.1. Réalisation du groupe G_1

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

3.2. Réalisation du groupe G_2

$$A_2=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1&0\end{bmatrix}, B_2=\begin{bmatrix}0&0&0&0&2&0\\0&0&0&0&0&2\\2&0&0&0&0&0\\0&2&0&0&0&0\\0&0&2&0&0&0\\0&0&0&2&0&0\end{bmatrix}.$$

3.3. Réalisation du groupe G_3

$$A_3=\begin{bmatrix}4&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}, B_3=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&4&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}, C_3=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&3&0&4&4\\0&0&0&3&4&1\\0&0&1&1&3&0\\0&0&1&4&0&3\end{bmatrix}.$$

3.4. Réalisation du groupe G_4

$$A_4=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\end{bmatrix}, B_4=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\end{bmatrix}, C_4=\begin{bmatrix}4&0&0&0&0&0\\0&4&0&0&0&0\\0&0&4&0&0&0\\0&0&0&4&0&0\\0&0&0&0&4&0\\0&0&0&0&0&4\end{bmatrix}.$$

3.5. Réalisation du groupe G_5

$$A_5=\begin{bmatrix}0&0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}, B_5=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}, C_5=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&4&0\\0&0&0&0&0&4\end{bmatrix}.$$

3.6. Réalisation du groupe G_6

$$A_6=\begin{bmatrix}3&0&4&4&0&0\\0&3&4&1&0&0\\1&1&3&0&0&0\\1&4&0&3&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}, B_6=\begin{bmatrix}0&0&2&0&0&0\\0&0&0&2&0&0\\2&0&0&0&0&0\\0&2&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}, C_6=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&4&0\\0&0&0&0&0&4\end{bmatrix}.$$

3.7. Réalisation du groupe G_7

$$A_7=\begin{bmatrix}0&4&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix},B_7=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&4&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix},C_7=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\end{bmatrix}.$$

3.8. Réalisation du groupe G_8

$$A_8=\begin{bmatrix}2&0&0&0&0&0\\0&3&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix},B_8=\begin{bmatrix}0&4&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix},C_8=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\end{bmatrix}.$$

3.9. Réalisation du groupe G_9

$$A_9=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\end{bmatrix},B_9=\begin{bmatrix}0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix},C_9=\begin{bmatrix}2&0&0&0&0&0\\0&2&0&0&0&0\\0&0&2&0&0&0\\0&0&0&2&0&0\\0&0&0&0&2&0\\0&0&0&0&0&2\end{bmatrix}.$$

3.10. Réalisation du groupe G_{10}

$$A_{10}=\begin{bmatrix}1&1&2&0&0&0\\1&4&0&2&0&0\\3&0&1&1&0&0\\0&3&1&4&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix},B_{10}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&4&0&0&0\\0&0&0&4&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

3.11. Réalisation du groupe G_{11}

$$A_{11}=\begin{bmatrix}1&1&2&0&0&0\\1&4&0&2&0&0\\3&0&1&1&0&0\\0&3&1&4&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix},B_{11}=\begin{bmatrix}0&0&2&0&0&0\\0&0&0&2&0&0\\2&0&0&0&0&0\\0&2&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

3.12. Réalisation du groupe G_{12}

$$A_{12}=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0\end{bmatrix},B_{12}=\begin{bmatrix}0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

3.13. Réalisation du groupe G_{13}

$$A_{13}=\begin{bmatrix}3&0&0&3&0&0\\0&3&0&0&3&0\\0&0&3&0&0&3\\0&0&0&2&0&0\\0&0&0&0&2&0\\0&0&0&0&0&2\end{bmatrix},B_{13}=\begin{bmatrix}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\\3&0&0&4&0&0\\0&3&0&0&4&0\\0&0&3&0&0&4\end{bmatrix},C_{13}=\begin{bmatrix}0&0&0&2&0&0\\0&0&0&0&2&0\\0&0&0&0&0&2\\2&0&0&4&0&0\\0&2&0&0&4&0\\0&0&2&0&0&4\end{bmatrix}.$$

3.14. Réalisation du groupe G_{14}

$$A_{14}=\begin{bmatrix}0&0&0&4&0&0\\0&0&0&0&4&0\\0&0&0&0&0&4\\1&0&0&4&0&0\\0&1&0&0&4&0\\0&0&1&0&0&4\end{bmatrix},B_{14}=\begin{bmatrix}3&0&0&3&0&0\\0&3&0&0&3&0\\0&0&3&0&0&3\\1&0&0&2&0&0\\0&1&0&0&2&0\\0&0&1&0&0&2\end{bmatrix}.$$

3.15. Réalisation du groupe G_{15}

$$A_{15}=\begin{bmatrix}0&2&0&0&0&0\\2&4&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix},B_{15}=\begin{bmatrix}1&2&0&0&0&0\\0&4&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\end{bmatrix},C_{15}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

Conclusion

Il n'est pas certain que $GL(6,5)$ soit le plus petit groupe de matrices à coefficients dans un corps fini dans lequel on peut trouver des modèles des 15 groupes non isomorphes d'ordre 24, mais c'est sûrement l'un des plus beaux, ce que je vais illustrer dans cette conclusion. Mon père et moi avons été des lecteurs enthousiasmés du livre *Gödel, Escher, Bach, les brins d'une guirlande éternelle* (Hofstadter D., 2000).

Le résultat décrit dans le présent article réunit en un seul énoncé des nombres qui ont une importance dans l'œuvre de Jean-Sébastien Bach :

– 15 est le nombre d'*Inventions à* 2 *voix* et d'*Inventions à* 3 *voix* pour clavier ;

– 24 est le nombre de préludes et fugues du *Clavier bien tempéré* ;

– 6 est le nombre de *Suites françaises, Suites anglaises* et *Partitas* et c'est le nombre maximal de voix pour une fugue apparaissant dans l'*Offrance musicale* ;

– 5 est le nombre de doigts d'une main, et c'est le nombre maximal de voix pour une fugue apparaissant dans le *Clavier bien tempéré.*

Le nombre $24 = 17 + 7$ est un exemple de ce que Hofstadter appelle, en écho aux *Variations Goldberg* du même Jean-Sébastien Bach, une Variation Goldbach (Hofstadter D., 200, p. 443 et suivantes), c'est-à-dire une somme de deux nombres premiers impairs, et celle-ci est assez remarquable puisque :

– 7 est le nombre de groupes de frises du plan, et 17 est le nombre de groupes cristallographiques du plan, qui ont été merveilleusement illustrés par Maurits Cornelius Escher ;

– 7 est le nombre de notes distinctes (Do, Ré, Mi, Fa, Sol, La, Si) et 17 est le nombre de syllabes de ce mot célèbre de Verlaine : "De la musique avant toute chose, et pour cela préfère l'impair" ;

– 7 est l'exposant du 5e nombre de Mersenne premier et 17 est l'exposant du 6e nombre de Mersenne premier, un nombre de Mersenne étant un entier de la forme $2^k - 1$ où k est un entier naturel.

Enfin, il convient d'observer que $15 \times 24 = 360$, et que 360° évoque l'idée de cercle. Or, avec les définitions de (Degos, J.-Y., 2013a), le groupe $GL(6, 5)$ se trouve être engendré circulairement, autrement dit borroméennement par les 3 matrices suivantes :

$$A=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&3\\1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&4\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0&0&1&0&0&0\\0&0&0&3&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&0&4&0&1\\1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}0&0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&3&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&1&4&0\\0&1&0&0&0&0\end{bmatrix},$$

ce qui signifie que chaque matrice se déduit de la précédente par conjugaison par une matrice d'ordre 3, à savoir la matrice :

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

c'est-'a-dire que l'on a : $B = \Gamma A \Gamma^{-1}$, $C = \Gamma B \Gamma^{-1}$ et $A = \Gamma C \Gamma^{-1}$.

Références

Calais J. (1984), *Éléments de théorie des groupes*, Paris, PUF, réédité en 2014, 430 p.

Debreil A. (2016), *Groupes finis et treillis de leurs sous-groupes*, Paris, Calvage et Mounet, 680 p.

Degos J.-G. (1991), *Contribution à l'étude du diagnostic financier des petites et moyennes entreprises*, Doctorat d'État ès sciences de gestion, Bordeaux, (mention Très Honorable, félicitations du jury, prix de thèse Académie de Bordeaux et CIC), Université Bordeaux I, 518 p.

Degos J.-G. (1998), *La comptabilité*, Paris, Flammarion, collection Domino, n°157, 128 p.

Degos J.-Y. (2013a), Linear groups and polynomial over Fp, *Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques*, Volume LIV, Fascicule 1, 56-74, Amiens, p. 56-74.

Degos J.-Y. (2013b), Borroméanité du groupe pulsatif, *Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques*, Volume LIV, Fascicule 3, Amiens, p. 211-220.

Hofstadter D. (2000), *Gödel Escher Bach, les brins d'une guirlande éternelle, fugue métaphorique sur les esprits et les machines inspirée de Lewis Carroll*, version française de Henry J. et French R. Paris, Dunod, 884 p.

Joyner D. (2008), *Adventures in Group Theory*, Second edition, Baltimore, The John Hopkins University Press, 310 p.

Le Lionnais F. (1999), *Les nombres remarquables*, nouveau tirage de l'édition de 1983, Hermann, Paris, 158 p.