

Les 15 groupes d'ordre 24 comme sous-groupes de $GL_6(\mathbb{F}_5)$

JEAN-YVES DEGOS

RÉSUMÉ. Dans cet article, on démontre que chaque groupe d'ordre 24 peut être plongé dans le groupe $GL_6(\mathbb{F}_5)$ des matrices à 6 lignes et 6 colonnes à coefficients dans le corps à 5 éléments. On démontre aussi que le groupe $GL_6(\mathbb{F}_5)$ est borroméen, ce qui fait que théoriquement les générateurs des 15 groupes d'ordre 24 pourraient s'écrire comme des mots sur les 3 générateurs de $GL_6(\mathbb{F}_5)$. Un des mérites de ce travail est, entre autres, de fournir des modèles concrets permettant la manipulation de certains groupes d'ordre 24, qui n'étaient connus qu'abstraitemment comme produits semi-directs.

The 15 groups of order 24 as subgroups of $GL_6(\mathbb{F}_5)$

ABSTRACT. In this paper, we show that every groupe of order 24 can be embedded in the group $GL_6(\mathbb{F}_5)$ of matrices with 6 rows and 6 columns with coefficients in the field of 5 elements. We also show the the group $GL_6(\mathbb{F}_5)$ is a Borromean one, so that theoretically the generators of the 15 groups of order 24 could be written as words on the 3 generators of $GL_6(\mathbb{F}_5)$. One of the merits of this work is, among other things, to provide concrete models allowing the manipulation of some groups of order 24, which were known only abstractly as semi-direct products.

1. Introduction

Pour montrer que les 15 groupes d'ordre 24 peuvent être plongés dans $GL_6(\mathbb{F}_5)$, nous allons partir de la classification de ces groupes par générateurs et relations (voir la section 2 ci-après). Nous créons alors pour chacun de ces groupes, le groupe formel correspondant dans Sagemath (voir [7]). Par exemple, pour les numérotés 1, 2, 10, 11, 12, 14, on aura :

```
F.<a,b,c> = FreeGroup()
G00 = F / [a,b,c]
G01 = F / [a^24,b,c]
G02 = F / [a^2, b^12, a*b*a*b^11,c]

G10 = F / [a^12, b^2, a*b*a*b,c]
G11 = F / [a^12, b^2*a^6, a*b*a*b,c]
G12 = F / [a^4, b^2, c, a*b*a*b*a*b]
```

Mots-clés: Groupes, Corps finis,
Classification math.: 00X99.

$$G_{14} = F / [a^3, b^8, c, a*b*a*b^7]$$

Pour chacun de ces groupes formels, on détermine la suite des nombres d'éléments d'ordre 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 (voir tableau de la section 3). Cela se fait au moyen des fonctions suivantes :

```
def orders(g):
    orders_list=[]
    for x in g.list():
        orders_list.append(x.order())
    return orders_list

def orders_numbers(g):
    the_orders=orders(g)
    the_numbers=[]
    for k in [1,2,3,4,6,8,12,24]:
        the_numbers.append(the_orders.\
                           count(k))
    return the_numbers

def list_order(g,n):
    elements=[]
    for x in g.list():
        if x.order()==n:
            elements.append(x)
    return elements
```

Pour chaque groupe, on essaie de déterminer des générateurs possibles. Cela fait, on vérifie que les relations ont bien lieu, que le cardinal est le bon, et à quelle « suite » on a affaire. Pour certains groupes, il est nécessaire de rechercher systématiquement les générateurs, car il n'y a pas d'heuristique.

L'ensemble du code nécessaire peut être cloné depuis GitLab (voir [5]).

2. La classification des groupes d'ordre 24

On rappelle dans cette section la classification des groupes d'ordre 24 (voir Tableau 1 page 4) telle qu'elle apparaît dans ([6], pp. 212–213), en la complétant par les présentations par générateurs et relations manquantes dans l'ouvrage. Le nom (colonne N) correspond à une numérotation donnée par l'auteur du présent article. On utilisera les notations suivantes :

Pour $n \geq 2$, C_n désigne le groupe cyclique d'ordre n (engendré par un unique générateur).

Pour $n \geq 2$, $\mathcal{D}_n$ désigne le groupe des isométries du polygone régulier à n côtés ; il est d'ordre $2n$ engendré par un élément r d'ordre n , et un élément t d'ordre 2 satisfaisant $trt^{-1} = r^{-1}$, soit encore $rtr = t$.

Pour $n \neq 2$, $\mathfrak{S}_n$ désigne le groupe symétrique de degré n des permutations de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ des n premiers entiers consécutifs.

Pour $n \neq 2$, $\mathfrak{A}_n$ désigne le groupe alterné composé des éléments de $\mathfrak{S}_n$ de signature 1.

Pour $m \geq 2$, $Q_{2m} = \langle a, b \mid a^{2m} = 1, aba = b, b^2 = a^m \rangle$ désigne le groupe des quaternions généralisés, qui est d'ordre $4m$.

3. Les 15 modèles de groupes d'ordre 24

On commence par donner un tableau (voir Tableau 2 page 5) qui détaille, pour chaque groupe d'ordre 24, le nombre d'éléments d'ordre d avec d diviseur de 24.

On donne ensuite pour chaque groupe Γ_i ($1 \leq i \leq 15$), un ensemble d'au plus 3 générateurs.

TABLE 1. Classification des groupes d'ordre 24

N	Structure	G	Relations
Γ_1	C_{24}	1	$a^{24} = 1$
Γ_2	$C_2 \times C_{12}$	2	$a^2 = 1, b^{12} = 1,$ $ab = ba$
Γ_3	$C_2^2 \times C_6$	3	$a^2 = 1, b^2 = 1, c^6 = 1,$ $ab = ba, ac = ca, bc = cb$
Γ_4	$\mathcal{D}_6 \times C_2$	3	$a^6 = 1, b^2 = 1, c^2 = 1,$ $aba = b, ac = ca, bc = cb$
Γ_5	$\mathfrak{A}_4 \times C_2$	3	$a^2 = 1, b^3 = 1, c^2 = 1,$ $(ba)^3 = 1, ac = ca, bc = cb$
Γ_6	$\mathcal{Q}_6 \times C_2$	3	$a^6 = 1, b^2 = a^3, c^2 = 1,$ $aba = b, ac = ca, cb = bc$
Γ_7	$\mathcal{D}_4 \times C_3$	3	$a^4 = 1, b^2 = 1, c^3 = 1,$ $aba = b, ac = ca, cb = bc$
Γ_8	$\mathcal{Q} \times C_3$	3	$a^4 = 1, b^2 = a^2, c^3 = 1,$ $bab = a, ac = ca, cb = bc$
Γ_9	$\mathfrak{S}_3 \times C_4$	3	$a^3 = 1, b^2 = 1, c^4 = 1,$ $aba = b, ac = ca, cb = bc$
Γ_{10}	$\mathcal{D}_{12}$	2	$a^{12} = 1, b^2 = 1,$ $aba = b$
Γ_{11}	$\mathcal{Q}_{12}$	2	$a^{12} = 1, b^2 = a^6,$ $aba = b$
Γ_{12}	$\mathfrak{S}_4$	2	$a^4 = 1, b^2 = 1,$ $(ab)^3 = 1$
Γ_{13}	$SL(2, 3)$	3	$a^4 = 1, b^2 = a^2, c^3 = 1,$ $aba = b, ac = cb, bc = cab$
Γ_{14}	$C_3 \rtimes C_8$	2	$a^3 = 1, b^8 = 1,$ $aba = b$
Γ_{15}	$C_3 \rtimes \mathcal{D}_4$	3	$a^3 = 1, b^4 = 1, c^2 = 1$ $bcb = c, aba = b, ac = ca$

Proposition 3.1. *Le groupe Γ_1 est isomorphe au sous-groupe de $GL_6(\mathbb{F}_5)$ engendré par :*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

TABLE 2. Caractérisation des groupes d'ordre 24

N	O_1	O_2	O_3	O_4	O_6	O_8	O_{12}	O_{24}
Γ_1	1	1	2	2	2	4	4	8
Γ_2	1	3	2	4	6	0	8	0
Γ_3	1	7	2	0	14	0	0	0
Γ_4	1	15	2	0	6	0	0	0
Γ_5	1	7	8	0	8	0	0	0
Γ_6	1	3	2	12	6	0	0	0
Γ_7	1	5	2	2	10	0	4	0
Γ_8	1	1	2	6	2	0	12	0
Γ_9	1	7	2	8	2	0	4	0
Γ_{10}	1	13	2	2	2	0	4	0
Γ_{11}	1	1	2	14	2	0	4	0
Γ_{12}	1	9	8	6	0	0	0	0
Γ_{13}	1	1	8	6	8	0	0	0
Γ_{14}	1	1	2	2	2	12	4	0
Γ_{15}	1	9	2	6	6	0	0	0

Démonstration. D'après ([4], 4.3.2 p. 70), le polynôme $P(X) = X^6 + X^5 + 2$ est un polynôme primitif de $\mathbb{F}_5[X]$. Par conséquent, sa matrice compagnon M dans $GL_6(\mathbb{F}_5)$ est un cycle de Singer qui a pour ordre $5^6 - 1 = 24 \times 651$. Ainsi, si $A_1 := M^{651}$ avec

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 4 & 3 \end{bmatrix},$$

alors A_1 engendre le groupe cyclique d'ordre 24, CQFD. $\square$

Proposition 3.2. *Le groupe Γ_2 est isomorphe au sous-groupe de $GL_6(\mathbb{F}_5)$ engendré par :*

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Démonstration. Il nous faut trouver un élément A_2 d'ordre 2 et un élément B_2 d'ordre 12 qui commutent. Or les choix de A_2 et B_2 faits dans l'énoncé du théorème conviennent. On en conclut que $\Gamma_2 \simeq \langle A_2, B_2 \rangle$. $\square$

Proposition 3.3. *Le groupe Γ_3 est isomorphe au sous-groupe de $GL_6(\mathbb{F}_5)$ engendré par :*

$$A_3 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Démonstration. Sachant que $4 = -1$ dans $\mathbb{F}_5$, les matrices A_3 et B_3 sont d'ordre 2 et commutent. Il est clair qu'elles commutent aussi avec C_3 . Il reste à voir que C_3 est d'ordre 6. Or on sait qu'une rotation d'ordre 6 dans $GL_2(\mathbb{R})$ est donnée par :

$$R = \begin{bmatrix} \cos \frac{2\pi}{6} & -\sin \frac{2\pi}{6} \\ \sin \frac{2\pi}{6} & \cos \frac{2\pi}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Puisque 2 et 3 sont inverses dans $\mathbb{F}_5$, la matrice

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ dans } GL_2(\mathbb{F}_5)$$

joue le même rôle que la matrice

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \text{ dans } GL_2(\mathbb{R}).$$

D'autre part, si l'on recherche dans $GL_2(\mathbb{F}_5)$ une matrice Q telle que $Q^2 = 3I$, I étant la matrice identité, on trouve que $Q = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ convient, et que la matrice R joue dans $GL_2(\mathbb{R})$ le même rôle que la matrice $\begin{bmatrix} D & -Q/2 \\ Q/2 & D \end{bmatrix}$ dans $GL_4(\mathbb{F}_5)$. On en conclut que

$$C_3 = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & D & -Q/2 \\ 0 & Q/2 & D \end{bmatrix} \in GL_6(\mathbb{F}_5)$$

est bien d'ordre 6. □

Proposition 3.4. *Le groupe Γ_4 est isomorphe au sous-groupe de $GL_6(\mathbb{F}_5)$ engendré par :*

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C_4 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Démonstration. La matrice C_4 est d'ordre 2 et commute avec A_4 et B_4 , puisqu'elle est diagonale. Il reste à voir que A_4 et B_4 engendrent $\mathcal{D}_6$. Or A_4 est bien d'ordre 6 (puisque la matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

est d'ordre 3), et B_4 est d'ordre 2. Il suffit donc de vérifier que $B_4 A_4 B_4^{-1} = A_4^{-1}$, c'est-à-dire $A_4 B_4 A_4 = B_4$, ce qui est facile en faisant des produits par blocs. $\square$

Proposition 3.5. *Le groupe Γ_5 est isomorphe au sous-groupe de $GL_6(\mathbb{F}_5)$ engendré par :*

$$A_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Démonstration. La matrice C_5 est d'ordre 2 et commute avec A_5 et B_5 . D'autre part, le groupe engendré par A_5 et B_5 est le même que le sous-groupe de $\mathfrak{S}_4$ engendré par les permutations de $\sigma = (1, 2, 3)$ et $\tau = (1, 2)(3, 4)$. On sait que c'est $\mathfrak{A}_4$, car il contient tous les 3-cycles. Donc $\Gamma_5 \simeq \langle A_5, B_5, C_5 \rangle$. $\square$

Proposition 3.6. *Le groupe Γ_6 est isomorphe au sous-groupe de $GL_6(\mathbb{F}_5)$ engendré par :*

$$A_6 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Démonstration. Un modèle de Q_6 dans $GL(2, \mathbb{C})$ est donné par :

$$\left\langle \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} \right\rangle,$$

par conséquent, un modèle de Q_6 dans $GL_4(\mathbb{F}_5)$ est donné par :

$$\left\langle \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

On en déduit donc que $\Gamma_6 \simeq \langle A_6, B_6, C_6 \rangle \simeq Q_6 \times C_2$ dans $GL_6(\mathbb{F}_5)$. □

Proposition 3.7. *Le groupe Γ_7 est isomorphe au sous-groupe de $GL_6(\mathbb{F}_5)$ engendré par :*

$$A_7 = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B_7 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C_7 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Démonstration. La matrice C_7 est d'ordre 3 comme déjà vu ci-dessus, donc elle engendre le groupe C_3 . D'autre part, les matrices

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

extraites de A_7 et B_7 jouent le même rôle dans $GL_2(\mathbb{F}_5)$ que les matrices

$$\begin{bmatrix} \cos \frac{2\pi}{4} & -\sin \frac{2\pi}{4} \\ \sin \frac{2\pi}{4} & \cos \frac{2\pi}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{2} & -\sin \frac{\pi}{2} \\ \sin \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

dans $GL_2(\mathbb{R})$, qui engendrent $\mathcal{D}_4$. Par conséquent $\Gamma_7 \simeq \langle A_7, B_7, C_7 \rangle \simeq \mathcal{D}_4 \times C_3$. $\square$

Proposition 3.8. *Le groupe Γ_8 est isomorphe au sous-groupe de $GL_6(\mathbb{F}_5)$ engendré par :*

$$A_8 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B_8 = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C_8 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Démonstration. Un modèle de $\mathcal{Q}$, groupe des quaternions, dans $GL(2, \mathbb{C})$ est donné par :

$$\left\langle \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle,$$

par conséquent, un modèle de $\mathcal{Q}$ dans $GL_2(\mathbb{F}_5)$ est donné par :

$$\left\langle \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle,$$

car ce groupe est isomorphe au précédent. On en déduit que $\Gamma_8 \simeq \langle A_8, B_8, C_8 \rangle \simeq \mathcal{Q} \times C_3$ dans $GL_6(\mathbb{F}_5)$. $\square$

Proposition 3.9. *Le groupe Γ_9 est isomorphe au sous-groupe de $GL_6(\mathbb{F}_5)$ engendré par :*

$$A_9 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_9 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C_9 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Démonstration. Les matrices A_9 et B_9 engendrent le même groupe que le 3-cycle $(1, 2, 3)$ (regarder A_9 comme un tableau de blocs de taille 2×2) et la transposition $(1, 2)$, à savoir $\mathfrak{S}_3$. D'autre part, la matrice C_9 est d'ordre 4, donc elle engendre C_4 et commute avec A_9 et B_9 , car elle est diagonale, ainsi $\Gamma_9 \simeq \mathfrak{S}_3 \times C_4$. $\square$

Proposition 3.10. *Le groupe Γ_{10} est isomorphe au sous-groupe de $GL_6(\mathbb{F}_5)$ engendré par :*

$$A_{10} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B_{10} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Démonstration. Les matrices :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

jouent dans $GL_4(\mathbb{F}_5)$ les rôles respectifs des matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} \cos \frac{2\pi}{12} & -\sin \frac{2\pi}{12} \\ \sin \frac{2\pi}{12} & \cos \frac{2\pi}{12} \end{bmatrix}$$

de $GL_2(\mathbb{R})$. En effet, on a :

$$\begin{bmatrix} \cos \frac{2\pi}{12} & -\sin \frac{2\pi}{12} \\ \sin \frac{2\pi}{12} & \cos \frac{2\pi}{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix},$$

et en reprenant les notations de la preuve de la Proposition 3.3, cette dernière matrice joue le même rôle que :

$$\begin{bmatrix} Q/2 & -D \\ D & Q/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \text{ dans } GL_4(\mathbb{F}_5).$$

On en conclut que $\Gamma_{10} \simeq \langle A_{10}, B_{10} \rangle \simeq \mathcal{D}_{12}$. $\square$

Proposition 3.11. *Le groupe Γ_{11} est isomorphe au sous-groupe de $GL_6(\mathbb{F}_5)$ engendré par :*

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Démonstration. Un modèle de Q_{12} dans $GL(2, \mathbb{C})$ est donné par :

$$\left\langle \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{6} & -\sin \frac{\pi}{6} \\ \sin \frac{\pi}{6} & \cos \frac{\pi}{6} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} \right\rangle,$$

par conséquent, un modèle de Q_{12} dans $GL_4(\mathbb{F}_5)$ est donné par :

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

On en déduit donc que $\Gamma_{11} \simeq \langle A_{11}, B_{11} \rangle \simeq Q_{12}$ dans $GL_6(\mathbb{F}_5)$. $\square$

Proposition 3.12. *Le groupe Γ_{12} est isomorphe au sous-groupe de $GL_6(\mathbb{F}_5)$ engendré par :*

$$A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Démonstration. Par construction, les matrices A_{12} et B_{12} de $GL_6(\mathbb{F}_5)$ ont été construites pour jouer le même rôle que matrices R_1 et T_{12} de ([3], Définition 1.3 p. 212 et Définition 2.1 p. 213) :

$$R_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } T_{12} = R_3 R_2^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Elles engendrent donc Pul, et on peut vérifier que $\text{Pul} \simeq \mathfrak{S}_4$, donc finalement $\Gamma_{12} \simeq \langle A_{12}, B_{12} \rangle \simeq \mathfrak{S}_4$. $\square$

Proposition 3.13. *Le groupe Γ_{13} est isomorphe au sous-groupe de $GL_6(\mathbb{F}_5)$ engendré par :*

$$A_{13} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, B_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

$$C_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Démonstration. On montre en fait que le groupe Γ_{13} peut se réaliser comme sous-groupe de $GL_2(\mathbb{F}_5)$ au moyen des instructions Sagemath (voir [7]) :

```
g=GL(2,5)
order3=list_order(g,3)
order4=list_order(g,4)
order2=list_order(g,2)

for a in order4:
    for b in order4:
        for c in order3:
            if b^2==a^2 and a*b*a==b \
            and a*c==c*b and b*c==c*a*b:
                print 'a=',a,'b=',b,'c=',c
                print
```

qui permettent de déduire les matrices A_{13} , B_{13} et C_{13} de l'énoncé. $\square$

Proposition 3.14. *Le groupe Γ_{14} est isomorphe au sous-groupe de $GL_6(\mathbb{F}_5)$ engendré par :*

$$A_{14} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, B_{14} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Démonstration. On montre en fait que le groupe Γ_{14} peut se réaliser comme sous-groupe de $GL_2(\mathbb{F}_5)$ au moyen des instructions Sagemath (voir [7]) :

```
g=GL(2,5)
order3=list_order(g,3)
order8=list_order(g,4)
for a in order3:
    for b in order8:
        if a*b*a==b:
            print 'a=',a,'b=',b
            print
```

qui permettent de déduire les matrices A_{14} et B_{14} de l'énoncé. $\square$

Proposition 3.15. *Le groupe Γ_{15} est isomorphe au sous-groupe de $GL_6(\mathbb{F}_5)$ engendré par :*

$$A_{15} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B_{15} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C_{15} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Démonstration. Une discussion avec Alain Debreil (voir [1]) a permis d'obtenir le résultat suivant : si $a = (1, 2, 3)$, $b = (2, 3)(4, 5, 6, 7)$, et $c = (4, 6)$, alors $\langle a, b, c \rangle \simeq \Gamma_{15}$ dans $\mathfrak{S}_7$. L'idée, pour faire baisser la dimension de 7 à 6, est alors, partant de :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \in GL_2(\mathbb{F}_5)$$

qui est d'ordre 3, de chercher une matrice B d'ordre 2 de $GL_2(\mathbb{F}_5)$ telles que $\langle A, B \rangle \simeq \mathfrak{S}_3$, ce que l'on peut faire avec les instructions `Sagemath` (voir [7]) suivantes :

```
A=GL(2,5)(matrix(2,2,[0,2,2,4]))
ordre2=list_order(GL(2,5),2)
for B in ordre2:
    S3=MatrixGroup([A,B])
    if orders_numbers(S3)==[1,3,2,0,0, \
                                0,0,0]:
        print S3
```

On trouve :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \in GL_2(\mathbb{F}_5).$$

Il est alors clair que les matrices A_{15} , B_{15} et C_{15} jouent dans $GL_6(\mathbb{F}_5)$ le même rôle que a , b et c dans $\mathfrak{S}_7$, d'où la conclusion de la proposition. $\square$

4. La borroméanité de $GL_6(\mathbb{F}_5)$

Théorème 4.1. *Considérons les matrices :*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Alors le groupe $GL_6(\mathbb{F}_5)$ est borroméen (voir [4]), engendré circulairement par les matrices A, B, C et $B = KAK^{-1}$, $C = KBK^{-1}$, $A = KCK^{-1}$.

Démonstration. À l'aide de Sagemath (voir [7]), on commence par vérifier que le sous-groupe de $GL_6(\mathbb{F}_5)$ engendré par A, B, C a le même cardinal que $GL_6(\mathbb{F}_5)$. On a donc $GL_6(\mathbb{F}_5) = \langle A, B, C \rangle$. On vérifie ensuite que si on remplace A ou B ou C par la matrice unité, on obtient un groupe trivial. Par conséquent le groupe $GL_6(\mathbb{F}_5)$ est borroméen de type I. $\square$

Corollaire 4.2. *Pour $1 \leq i \leq 15$, le modèle du groupe Γ_i dans $GL_6(\mathbb{F}_5)$ est engendré par trois mots en A, B, C .*

Démonstration. C'est évident. $\square$

5. Conclusion et questions ouvertes

Nous avons réussi à trouver un modèle de chacun des 15 groupes d'ordre 24 dans le groupe $GL_6(\mathbb{F}_5)$. Cependant, ce dernier est d'ordre $11\,064\,475\,422 \times 10^{15}$, alors que le Théorème de Cayley dit qu'on peut les réaliser dans le groupe $\mathfrak{S}_{24}$, qui est d'ordre plus petit, à savoir : $24! = 62\,044\,840\,733\,239\,439\,360 \times 10^{15}$. Il nous faut donc améliorer le résultat obtenu ici. Ce sera fait dans un prochain article, où nous montrerons qu'en fait il est possible de réaliser les groupes d'ordre 24 dans $GL_6(\mathbb{F}_3)$.

Plusieurs suites à ce travail pourraient être envisagées :

- (1) Écrire chacun des générateurs de Γ_i (pour $1 \leq i \leq 15$) comme un mot sur les matrices A, B, C de la section précédente.

- (2) Écrire $GL_6(\mathbb{F}_5)$ comme limite inductive des groupes Γ_i (pour $1 \leq i \leq 15$), avec des morphismes convenables.
- (3) Trouver, pour chaque $1 \leq i \leq 15$, un polynôme $P_i(X) \in \mathbb{Q}[X]$ irréductible tel que :
- pour chaque $1 \leq i \leq 15$, l'extension $\mathbb{Q}[X]/(P_i)$ admet Γ_i comme groupe de Galois sur $\mathbb{Q}$;
 - la manière dont se recollent les $(\Gamma_i)_{1 \leq i \leq n}$ se « lit » sur la famille $(P_i(X))_{1 \leq i \leq n}$.
- (4) Déterminer est le plus petit ordre d'un groupe $GL_n(\mathbb{F}_p)$ avec $n \geq 2$ et p premier qui contient tous les groupes d'ordre 24.

Références

- [1] J.-Y. Degos A. Debreil and alii, *Produit semi-direct de $c3$ par $d4$* , <http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?3,1226283,1226283> (2016).
- [2] A. Debreil, *Groupes finis et treillis de leurs sous-groupes*, Calvage et Mounet, Paris, 2016.
- [3] J.-Y. Degos, *Borroméanité du groupe pulsatif*, Cah. Top. Géo. Diff. Cat. **LIV** (3) (2013), 211–220.
- [4] ———, *Linear groups and polynomials over $\mathbb{F}_p$* , Cah. Top. Géo. Diff. Cat. **LIV** (1) (2013), 56–74.
- [5] ———, *Projet goo24gl65*, <https://gitlab.com/jyde/goo24gl65.git> (2021).
- [6] D. Joyner, *Adventures in Group Theory*, 2nd ed., The John Hopkins University Press, Baltimore, 2086.
- [7] W. A. Stein et al., *Sage Mathematics Software (Version 9.6)*, The Sage Development Team, 2022, <http://www.sagemath.org>.

J.-Y. Degos

JEAN-YVES DEGOS
Centre statistique de Metz, Insee
1, rue Marconi
F-57070 METZ
FRANCE
jean-yves.degos@insee.fr