

Inventions de Bach et groupe de Klein

par Jean-Yves DEGOS*

Résumé.

Dans cet article, partant de la partition des *Inventions* de Jean-Sébastien Bach, on mobilise le groupe de Klein pour en déduire la proposition d'un projet d'œuvre musicale dont la symétrie de l'architecture dépasse celle de la création originelle du Cantor de Leipzig.

Introduction

La musique donne souvent à voir (et à entendre) des structures mathématiques, comme cela a été mis en évidence, par exemple, dans un article d'Emmanuel Amiot précédemment publié dans *Quadrature : Chopin virtuose de la théorie des groupes ?* (voir [AE]). Une des raisons pour lesquelles la musique de Jean-Sébastien Bach est intemporelle tient à ce qu'elle est d'abord conceptuelle, au niveau des partitions : on ne peut pas ne pas y déceler au simple regard de nombreuses symétries, même lorsqu'on ne sait pas lire la musique. C'est en détectant l'une de ces symétries dans l'œuvre composée du livre des *Inventions à 2 voix* et du livre des *Inventions à 3 voix* (voir [BSJ], page 2 précédant l'avant-propos) que nous avons eu l'idée d'essayer d'aller un peu plus loin que cette symétrie-là. Après avoir exhibé ladite symétrie dans la première section, nous ferons, dans la deuxième section, quelques rappels sur le groupe de Klein, que l'on mettra en œuvre dans la troisième section pour proposer un dépassement des *Inventions* quant à l'esthétique de leur architecture.

I Les Inventions de Jean-Sébastien Bach

Les *Inventions* (BWV 772-801) ont été composées à partir de 1720 par Jean-Sébastien Bach et comportent 15 inventions à 2 voix et 15 inventions à 3 voix. L'architecture des deux pièces est telle qu'on y observe une

* Agrégé docteur en mathématiques, expert en orthographe, statisticien, contact : jydegos chez proton point me.

symétrie d'axe vertical dans la répartition du nombre de dièses ou de bémols dans les *Inventions à 2 voix* (livre 1) et les *Inventions à 3 voix* (livre 2).

Le Tableau 1 donne à voir cette symétrie entre les deux livres.

TABLEAU 1. Répartition des altérations dans les *Inventions*

Numéro	Inv. à 2 voix	Inv. à 3 voix
Invention 1	Aucune	Aucune
Invention 2	3 bémols	3 bémols
Invention 3	2 dièses	2 dièses
Invention 4	1 bémol	1 bémol
Invention 5	3 bémols	3 bémols
Invention 6	4 dièses	4 dièses
Invention 7	1 dièse	1 dièse
Invention 8	1 bémol	1 bémol
Invention 9	4 bémols	4 bémols
Invention 10	1 dièse	1 dièse
Invention 11	2 bémols	2 bémols
Invention 12	3 dièses	3 dièses
Invention 13	Aucune	Aucune
Invention 14	2 bémols	2 bémols
Invention 15	2 dièses	2 dièses

Le chaos apparent au niveau des altérations tient à ce que les 15 inventions se succèdent, à chaque fois, dans les tonalités : *do majeur*, *do mineur*, *ré majeur*, *ré mineur*, *mi bémol majeur*, *mi majeur*, *mi mineur*, *fa majeur*, *fa mineur*, *sol majeur*, *sol mineur*, *la majeur*, *la mineur*, *si bémol majeur*, *si mineur*.

Maintenant, si nous faisons abstraction de cette ma-

nière raisonnable (d'un point de vue musical) d'enchaîner les tonalités, en ne retenant que les armures à la clé (le nombre et la nature des altérations), alors, au moyen du groupe de Klein (de son prénom Félix, né le 25 avril 1849 à Düsseldorf), que Jean-Sébastien Bach, mort à Leipzig le 28 juillet 1750, ne pouvait pas connaître, nous pourrions rendre son œuvre parfaitement symétrique, d'un point de vue visuel.

II Le groupe de Klein

Le groupe de Klein est le groupe abélien (commutatif) $V = \{e, a, b, c\}$ où e est l'élément neutre, et où a, b, c sont trois éléments d'ordre 2 ; la table de composition des éléments est la suivante :

$\cdot$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Il peut être réalisé comme le groupe des isométries laissant globalement invariant l'ensemble des sommets d'un rectangle non carré $ABCD$, ou encore comme le sous-groupe de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ défini par l'ensemble $\{(0,0,0), (0,3,0), (3,0,3), (3,3,3)\}$ muni de l'addition composantes par composantes, modulo 6.

Dans le premier cas, si on note I (respectivement J, K, L) le milieu du segment $[AB]$ (respectivement $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$), on pourra prendre :

- pour e , l'application identité de l'ensemble $\{A, B, C, D\}$;
- pour a , la symétrie d'axe (IK) ;
- pour b , la symétrie d'axe (JL) ;
- pour c , la symétrie centrale de centre O , résultat de la composition de a et b : $a \circ b$.

Dans la mesure où la suite des sept bémols est *si, mi, la, ré, sol, do, fa*, et la suite des sept dièses est *fa, do, sol, ré, la, mi, si*, et où :

$$2 \times 15 = 2 \times (2 \times 7 + 1),$$

le mathématicien n'a pas de mal à imaginer ce qu'il aimerait *voir* comme structure d'une œuvre composé de deux livres de 15 pièces.

III Au-delà des *Inventions*

Il serait tout à fait possible de structurer deux nouveaux livres, en ayant recours au groupe de Klein pour concevoir l'architecture exposée dans le Tableau 2 ci-après.

TABLEAU 2. Répartition des altérations selon un groupe de Klein

Numéro	Livre 1	Livre 2
Invention 1	7 dièses	7 bémols
Invention 2	6 dièses	6 bémols
Invention 3	5 dièses	5 bémols
Invention 4	4 dièses	4 bémols
Invention 5	3 dièses	3 bémols
Invention 6	2 dièses	2 bémols
Invention 7	1 dièse	1 bémol
Invention 8	Aucune	Aucune
Invention 9	1 bémol	1 dièse
Invention 10	2 bémols	2 dièses
Invention 11	3 bémols	3 dièses
Invention 12	4 bémols	4 dièses
Invention 13	5 bémols	5 dièses
Invention 14	6 bémols	6 dièses
Invention 15	7 bémols	7 dièses

L'ordre raisonnable des tonalités serait apparemment bouleversé, puisque décrit par le tableau suivant.

TABLEAU 3. Répartition des tonalités selon un groupe de Klein

Numéro	Livre 1	Livre 2
Invention 1	Do # majeur	La b mineur
Invention 2	Fa # majeur	Mi b mineur
Invention 3	Si majeur	Si b mineur
Invention 4	Mi majeur	Fa mineur
Invention 5	La majeur	Do mineur
Invention 6	Ré majeur	Sol mineur
Invention 7	Sol majeur	Ré mineur
Invention 8	Do majeur	La mineur
Invention 9	Fa majeur	Mi mineur
Invention 10	Si b majeur	Si mineur
Invention 11	Mi b majeur	Fa # mineur
Invention 12	La b majeur	Do # mineur
Invention 13	Ré b majeur	Sol # mineur
Invention 14	Sol b majeur	Ré # mineur
Invention 15	Do b majeur	La # mineur

En ce qui concerne la correspondance entre le Tableau 2 et le Tableau 3, soit on est musicien et, grâce à sa formation musicale, on est inconsciemment compétent pour la faire sans réfléchir ; soit on est plus modestement mathématicien mélomane, et on peut la faire en s'aidant des pages 32 et 34 du célèbre « Hanon » (voir [HCL]), ou mieux de la page 64 de la *Théorie de la musique* de Danhauser (voir [DaA]).

Mais le Tableau 2 présente trois symétries :

1. une symétrie par rapport à un axe vertical : pour

chaque $1 \leq i \leq 15$, les inventions numéro i ont le même nombre d'altérations dans le livre 1 et le livre 2 ;

2. une symétrie par rapport à un axe horizontal (formé par l'invention numéro 8) : pour chaque $1 \leq i \leq 7$, les inventions numéros i et $16 - i$ ont le même nombre d'altérations dans chaque livre ;
3. une symétrie centrale : dans le livre $j \in \{1, 2\}$, l'invention numéro i tel que $1 \leq i \leq 15$, a les mêmes nombre et type d'altérations que l'invention numéro $16 - i$ du livre $2 - j$.

Cette troisième symétrie permet de justifier que dans le Tableau 3, dans le livre $j \in \{1, 2\}$, la gamme de l'invention numéro i tel que $1 \leq i \leq 15$ est la *relative* de la gamme de l'invention numéro $16 - i$ du livre $2 - j$, donc cette structure, géométriquement idéale, est aussi pertinente musicalement.

Plus fort : le groupe de Klein pourrait également être donné à voir sur la scène par les artistes interprétant la partition, à la condition que l'œuvre soit composée pour :

- un homme (qui est d'ordre 1, dans le sens où il a *une* seule hormone sexuelle : la testostérone) H jouant d'un instrument sur *une* seule clé (par exemple une trompette ou une clarinette) ;
- trois femmes (qui sont d'ordre 2, dans le sens où elles ont *deux* hormones sexuelles : l'œstrogène et la progestérone) A, B, C jouant d'un instrument sur *deux* clés (par exemple des pianos ou des clavecins) ;

l'homme incarnant l'identité, et les trois femmes, les trois symétries.

Il serait possible de pousser encore plus loin le raffinement en disposant les instrumentistes ainsi :

1. un homme à initiale H ;
2. une femme à initiale A ;
3. une femme à initiale C ;
4. une femme à initiale B ;

le tout selon la configuration suivante :

$$\begin{array}{ccc} & C & \\ B & & A \\ & H & \end{array},$$

H étant au plus près du public, et C au plus près d'un orchestre éventuel, ce qui ferait apparaître la permutation :

$$\begin{pmatrix} B & A & C & H \\ A & C & B & H \end{pmatrix},$$

qui équivaudrait à la permutation circulaire (123), moyennant la bijection évidente entre les ensembles $\{B, A, C, H\}$ et $\{1, 2, 3, 4\}$.

Cela fait apparaître la (123), et on pourrait faire en sorte que les partitions des instrumentistes A, C, B ¹ constituent un ensemble globalement invariant par cette permutation. Dans cette mise en scène, il y a une symétrie d'axe vertical, puisque B et A sont des femmes.

Mais il y a des raisons de préférer la répartition sexuelle suivante, où il y aurait une symétrie d'axe horizontal :

1. une femme à initiale C ;
2. une femme à initiale A ;
3. une femme à initiale H ;
4. un homme à initiale B ;

et la permutation mise en jeu serait alors la suivante :

$$\begin{pmatrix} B & A & C & H \\ B & H & A & C \end{pmatrix},$$

et ce sont donc les partitions des instrumentistes A, H, C qui devraient se déduire les unes des autres par permutation circulaire.

Et il y aurait un mouvement allant de B de vers A . Or :

1. la lettre A renvoie à l'excellence, car c'est la meilleure appréciation littéraire que l'on puisse obtenir pour un travail ;
2. la lettre A renvoie à la note *la* en notation anglo-saxonne, et à l'expression « donner le la » ;
3. l'excellence se situe toujours à l'extrême droite.

Pour étayer le troisième point, supposons que l'on doive organiser une audition de fin de d'année dans une école de musique : alors les moins bons élèves interviendront au début du programme, tandis que les meilleurs interviendront à la fin, c'est-à-dire, une fois que le temps est rapporté à un axe gradué horizontal, à l'extrême droite.

C'est une expérience vécue par l'auteur de ces lignes, qui participa dans les années 1980 à une audition de piano comportant une cinquantaine d'élèves, où il intervint dans les dix premières positions, tandis que la vedette, intervenant en dernier lieu se prénomait Aline (donc $A...$) qui ne semble pas être aujourd'hui une personne publique ; en revanche parmi les dix derniers élèves (et même probablement parmi les cinq derniers élèves...) à jouer se trouvait... Laetitia Colombani, l'auteur du roman à succès *La tresse* (voir [CL]).

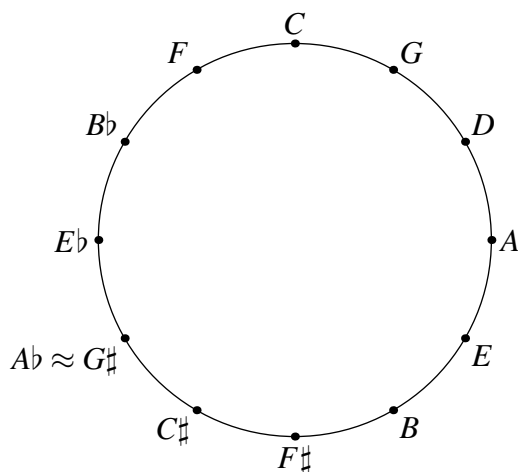
À bien y regarder, Laetitia Colombani a mis en scène une sorte de groupe de Klein sans s'en rendre compte : son roman implique effectivement trois femmes (qui ont *deux* hormones sexuelles, comme on l'a vu) : Smita,

1. Hommage à la claveciniste Anne-Catherine Bucher (ACB), qui a enregistré les *Variations Goldberg* au clavecin, et possède la chaîne, <https://www.youtube.com/@acb1685>.

Giula, et Sarah, qui « tiennent ensemble » par l'intermédiaire d'une sorte d'élément neutre, inerte : le cheveu, qui, comme courbe, possède *un* seul degré de liberté.

La disposition ci-dessus, dans laquelle *A* est à l'extrême droite intervient encore dans la représentation du cycle des quintes tel qu'il intervient sur la Figure 1 page 4. Cette figure est déduite de celle que nous avons trouvée en 1998 une prépublication de Dave Benson intitulée *Mathematics and Music*, à la section 4.3 du chapitre 4, page 63. Elle a probablement été reprise dans la référence [BD].

FIGURE 1. Le cycle des quintes, en anglais



Sur la Figure 1, on observerait une flèche de pointe *A* en traçant les cordes $[GA]$ et $[AB]$. Ces trois lettres *G, A, B*, renvoient aux trois notes *sol, la, si*. Si on les chante deux fois, rapidement, un rythme de « deux croches-noire, deux croches-noire », on obtient rien moins qu'un motif qui apparaît, à transposition près, dans la célèbre *Marche Turque* de la Sonate numéro 11 pour piano de Mozart (voir [MWA]), qui se prénomme... Amadeus : encore l'excellence du *A*, à l'extrême droite...

Conclusion

Le lecteur de la présente construction musico-géométrique serait-il convaincu de sa beauté architecturale que l'auteur du présent texte aurait atteint son but.

Mais s'il est exact, à propos du compositeur Jean-Sébastien Bach, que « s'il avait eu un piano, il l'aurait utilisé », il est fort probable que s'il avait connu le groupe de Klein, le géomètre Jean-Sébastien Bach l'aurait également utilisé.

Au XXI^e siècle, les compositeurs qui s'intéressent aux mathématiques et les mathématiciens qui s'intéressent à la composition ont la chance de disposer à la

fois de l'héritage de Jean-Sébastien Bach et de celui de Félix Klein. L'auteur forme donc le vœu de pouvoir un jour concrétiser cette vision...

Une fois que la structure est définie, basée sur le nombre 15 des *Inventions* de Jean-Sébastien Bach, on ne peut pas ne pas avoir envie d'y faire apparaître aussi le 24, nombre des préludes et fugues de chacun des deux livres du *Clavier bien tempéré* de Jean-Sébastien Bach, d'autant plus :

- qu'il existe un théorème de théorie des groupes qui affirme qu'il y a exactement 15 groupes d'ordre 24 à isomorphisme près ;
- que l'auteur de ces lignes a réalisé une représentation graphique des tables de Cayley de ces groupes, qui pourrait permettre aux compositeurs de mieux les « sentir » (d'un point de vue émotionnel) que les mathématiciens ne les « voient » (d'un point de vue rationnel), puisque les couleurs sont un phénomène vibratoire, tout comme le chant des oiseaux (voir [MO]).

On peut toujours, à ce jour, visiter cette exposition dans les locaux de l'École nationale de la statistique et de l'analyse de l'information (Énsai), à Bruz².

Références

- [AE] Amiot E., *Chopin virtuose de la théorie des groupes ?*, *Quadrature* **42** (2001) 27–36.
- [BD] Benson D. J. – *Music : A Mathematical Offering*, Cambridge University Press, 2006.
- [BSJ] Bach J.-S., *Inventions à deux et à trois voix*, éditions Choudens, Paris, 1933, classification : BWV 772–801.
- [CL] Colombani L., *La tresse*, Grasset, 2017.
- [DaA] Danhauser A., *Théorie de la musique*, Éditions Henry Lemoine, Paris, 1929.
- [DeA] Debreil A., *Groupes finis et treillis de leurs sous-groupes*, Calvage et Mounet, Paris, 2016.
- [HCL] Hanon C. L., *Le pianiste virtuose en 60 exercices*, seule édition authentique revue et augmentée par Alphonse Schotte, Schott frères, Bruxelles, Paris, 1929.
- [MO] Messaien O. – *Catalogue d'oiseaux*, première interprétation par Yvonne Loriod à la salle Gaveau, le 15 avril 1959.
- [MWA] Mozart W. A. – *Sonate numéro 11 (Marche turque)*, K331, Éditions Henry Lemoine, Paris, 1988.

2. *Art et mathématiques : Vingt-quatre*, par Jean-Yves Degos, 18 mai 2021, en ligne : <https://ensai.fr/art-mathematiques-jean-yves-degos/>.